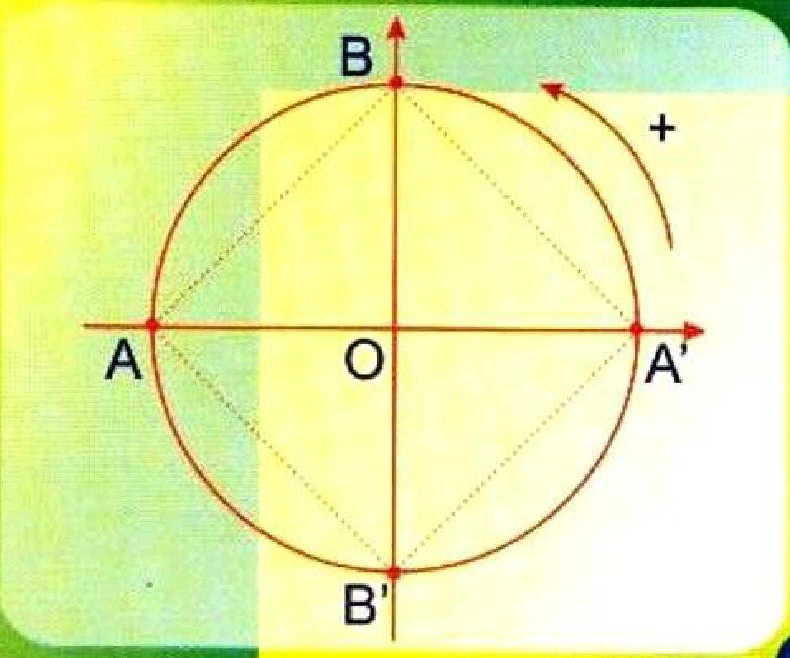
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - TRỊNH MINH LÂM - LÊ ĐÌNH NGỌC - LÊ THỊ PHƯƠNG

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ và GIẢI TÍCH 11

(CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO)

(Tái bản lần thứ hai)



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - TRỊNH MINH LÂM - LÊ ĐÌNH NGỌC - LÊ THỊ PHƯƠNG

GIẢI BÀI TẬP
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
Nâng cao

(Tái bản lần thứ hai)

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản trong SGK
- Câu hỏi trắc nghiệm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

– Cuốn sách **Hướng dẫn giải bài tập Đại số và Giải tích nâng cao** có nội dung tương ứng với sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 nâng cao áp dụng từ năm 2007 – 2008.

– Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần.

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập căn bản

III. Câu hỏi trắc nghiệm

IV. Đáp án

Phần I: Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của sách giáo khoa mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II: Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong sách giáo khoa, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III: Trình bày các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp các em ôn luyện lại kiến thức đã học.

Phần IV: Trình bày đáp án câu hỏi trắc nghiệm có ở phần III.

– Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau:

Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong sách giáo khoa, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của SGK, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc hơn, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các câu hỏi trắc nghiệm ở phần III để củng cố kiến thức.

Hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt Đại số và giải tích 11 nâng cao.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

Các tác giả

CHƯƠNG I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số $y = \sin x$.

- Tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Có đồ thị là một đường hình sin.

2. Hàm số $y = \cos x$.

- Tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Có đồ thị là một đường hình sin.

3. Hàm số $y = \tan x$.

- Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Đồ thị nhận mỗi đường $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ là một đường tiệm cận.

4. Hàm số $y = \cot x$.

- Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π.
- Đồng biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Đồ thị nhận mỗi đường $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là một đường tiệm cận.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sqrt{3 - \sin x}$; b) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$; d) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Giải

a) Điều kiện: $3 - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x} \geq 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Điều kiện: $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2: Xét tính chẵn, lẻ của mỗi hàm số sau:

a) $y = -2\sin x$; b) $y = 3\sin x - 2$;

c) $y = \sin x - \cos x$; d) $y = \sin x . \cos^2 x + \tan x$.

Giải

a) Tập xác định là: $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và $-2.\sin(-x) = 2\sin x = -f(x)$ $(f(x) = -2\sin x)$.

Do đó: Hàm số $y = -2\sin x$ là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của $f(x) = 3\sin x - 2$ là: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và ta có: $f(-x) = 3\sin(-x) - 2 = -3\sin x - 2 \neq \pm f(x)$

$\Rightarrow$ $y = 3\sin x - 2$ là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

c) Tập xác định của $f(x) = \sin x - \cos x$ là: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x \neq \pm f(x)$

$\Rightarrow$ $y = \sin x - \cos x$ là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

d) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Tập xác định của $f(x) = \sin x . \cos^2 x + \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

là tập đối xứng qua O. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

và $f(-x) = \sin(-x).\cos^2(-x) + \tan(-x) = -(\sin x.\cos^2 x + \tan x) = -f(x)$

$\Rightarrow y = \sin x . \cos^2 x + \tan x$ là hàm số lẻ.

Bài 3: Tm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3$; b) $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$;

c) $y = 4\sin\sqrt{x}$.

Giải

a) Ta có: $-1 \le \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2.\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3 \le 5$

$\Rightarrow$ Max $y = 5$ khi $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Min $y = 1$ khi $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: $-1 \le \sin(x^2) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1 \le \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow$ Max $y = \sqrt{2} - 1$ khi $\sin(x^2) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$.

Min $y = -1$ khi $\sin(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi}, k \in \mathbb{Z}$. .

c) Đều kiện $x \ge 0$.

Ta có: $-1 \le \sin\sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow -4 \le 4\sin\sqrt{x} \le 4$

$\Rightarrow$ Max $y = 4$ khi $\sin\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z_+$

$\Leftrightarrow x = \left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)^2, k \in \mathbb{Z}_+$

Min $y = -4$ khi $\sin\sqrt{x} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z_+^*$.

$\Leftrightarrow x = \left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)^2, k \in \mathbb{Z}^*_+$

Bài 4: Cho các hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và các khoảng

$J_1 = \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right), J_2 = \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right), J_3 = \left(\dfrac{31\pi}{4}; \dfrac{33\pi}{4}\right), J_4 = \left(-\dfrac{452\pi}{3}; -\dfrac{601\pi}{4}\right)$.

Hỏi hàn số nào trong 3 hàm số trên đồng biến trên khoảng J_1? Trên khoảng J_2? trên khoảng J_3? trên khoảng J_4? (Trả lời bằng cách lập bảng)

Giải

f(x) đồng biến trên	g(x) đồng biến trên	h(x) đồng biến trên
J_2 và J_3	J_1 và J_4	J_1, J_2 và J_3

Bài 5: Trong khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai? Giải thích vì sao?

a) Trên mỗi khoảng mà hàm số y = sinx đồng biến thì hàm số y = cosx nghịch biến.

b) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

Giải

a) Khẳng định này sai. Tại vì trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số y = sinx là đồng biến nhưng hàm số y = cosx đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

b) Khẳng định này đúng vì: ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Do vậy, trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì dẫn tới hàm số $y = 1 - \sin^2 x$ là nghịch biến hay $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

Bài 6: Cho hàm số y = f(x) = 2.sin2x.

a) Chứng minh rằng với số nguyên k tùy ý, luôn có $f(x + k\pi) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số y = 2.sin2x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

c) Vẽ đồ thị hàm số y = 2.sin2x.

Giải

a) Ta có: $f(x + k\pi) = 2.\sin 2(x + k\pi) = 2.\sin(2x + k2\pi) = 2\sin 2x$

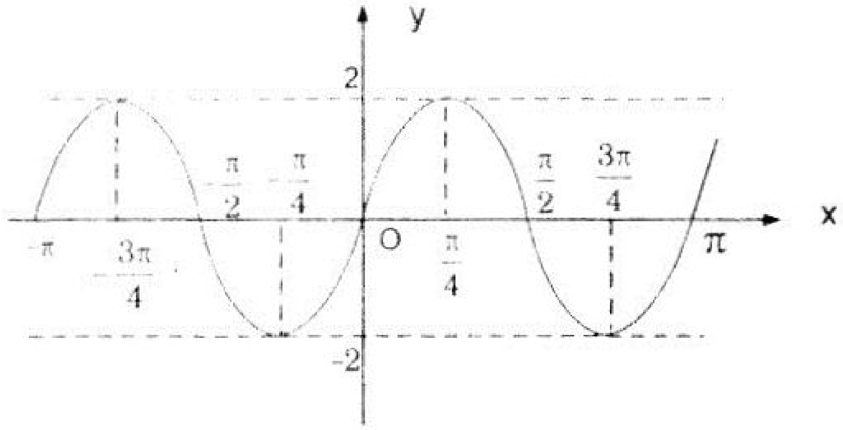
$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$, với mọi $x \in R$.

b) Ta có bảng biến thiên của y = 2.sin2x trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
2x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
2.sin2x	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

c) Đồ thị hàm số y = 2.sin2x

c) Đồ thị hàm số y = 2.sin2x



LUYỆN TẬP

Bài 7: Xét tính chẵn, lẻ của mỗi hàm số sau:

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = \tan|x|$; c) y = tanx − sin2x.

Giải

a) Tập xác định của $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ là $D = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq \pm\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số không chẵn cũng không lẻ.

b) Điều kiện: $\cos|x| \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z. \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập xác định của $f(x) = \tan|x|$

Ta có $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow y = \tan|x|$ là hàm số chẵn.

c) Tương tự $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập xác định của

$$f(x) = \tan x - \sin 2x$$

Ta có $\begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = \tan(-x) - \sin(-2x) = -(\tan x - \sin 2x) = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ y = tanx − sin2x là hàm số lẻ.

Bài 8: Cho các hàm số sau:

a) $y = -\sin^2 x$; b) $y = 3\tan^2 x + 1$;

c) $y = \sin x \,.\, \cos x$; d) $y = \sin x.\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x$.

Chứng minh rằng mỗi hàm số $y = f(x)$ đó đều có tính chất:

$f(x + kx) = f(x)$, với $k \in Z$, x thuộc tập xác định của hàm số f.

Giải

a) $f(x) = -\sin^2 x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$f(x + k\pi) = -\sin^2(x + k\pi) = -\frac{1 - \cos(2x + k2\pi)}{2} = -\frac{1 - \cos 2x}{2} = -\sin^2 x$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = 3\tan^2 x + 1$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f(x + k\pi) = 3\tan^2(x + k\pi) + 1 = 3\tan^2 x + 1 = f(x)$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

c) Tương tự ta có: $f(x + k\pi) = \sin(x + k\pi).\cos(x + k\pi) = \frac{1}{2}\sin(2x + k2\pi)$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x.\cos x = f(x)$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d) Tương tự ta có: $f(x + k\pi) = \sin(x + k\pi).\cos(x + k\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2(x + k\pi)$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x + k2\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x + k2\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x = \sin x.\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x = f(x)$$

$\Rightarrow f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 9: Cho hàm số $y = f(x) = A.\sin(\omega x + \alpha)$, ($A$, ω, α là các hằng số khác 0).

Chứng minh rằng mỗi số nguyên k ta có: $f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$,

với mọi x.

Giải

Tập xác định của hàm số $y = A.\sin(\omega x + \alpha)$ là $\mathbb{R}$. Do đó, ta có:

$$f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left[\omega\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = A\sin(\omega x + \alpha + k2\pi)$$

$$= A\sin(\omega x + \alpha)$$

Hay $f\left(x + k\dfrac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$ với mọi x.

Bài 10: Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng xác định bởi phương trình $y = \dfrac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số y = sinx đều cách gốc tọa độ một khoảng nhỏ hơn $\sqrt{10}$.

Giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ giao điểm, ta có $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{x_0}{3} \\ y_0 = \sin x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3\sin x_0 \\ y_0 = \sin x_0 \end{cases}$$

Ta có: $OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{9\sin^2 x_0 + \sin^2 x_0} = \sqrt{10}\,|\sin x_0| \le \sqrt{10}$.

Bài 11: Từ đồ thị của hàm số y = sinx hãy suy ra và vẽ các đồ thị của hàm số sau:

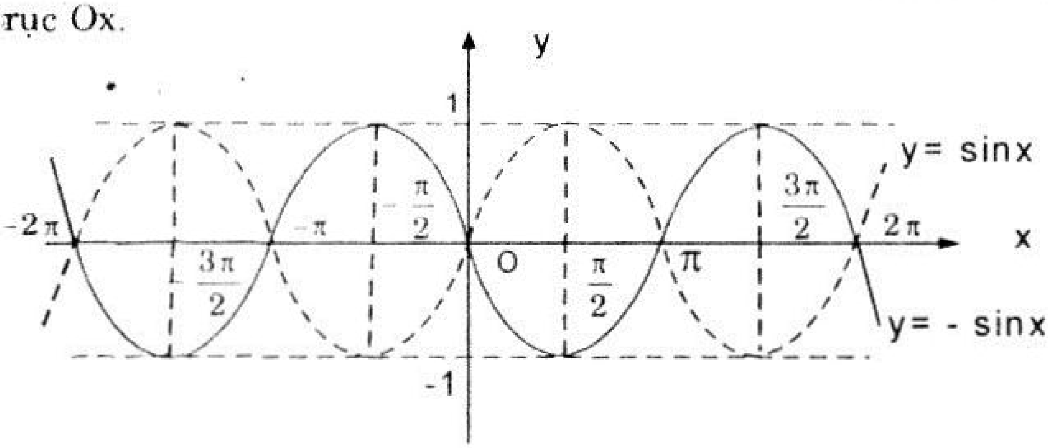
a) $y = -\sin x$; b) $y = |\sin x|$; c) $y = \sin|x|$.

Giải

a) Đặt $y = f(x) = \sin x$, $y = g(x) = -\sin x$. Do đó:

$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = -\sin x = -f(x)$.

Nên đồ thị của hàm số y = – sinx đối xứng với đồ thị hàm số y = sinx qua trục Ox.



b) Tương tự, đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ gồm phần phía trên trục hoành của đồ thị hàm số y = sinx và lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành qua trục Ox.